Дополнительные материалы
к отчёту о выполнении проекта № 19-12-00123
«Мюонные аномалии, ультрапериферические столкновения на LHC и суперсимметрия»
в 2021 году

Сечение ультрапериферического столкновения с учётом фактора подавления:

$$\sigma(AB \to ABX) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}s \left[\sigma_\parallel(\gamma\gamma \to X)\, \frac{\mathrm{d}L_{AB}^\parallel}{\mathrm{d}s} + \sigma_\perp(\gamma\gamma \to X)\, \frac{\mathrm{d}L_{AB}^\perp}{\mathrm{d}s} \right], \tag{1}$$

где $\sigma_\parallel(\gamma\gamma \to X)$, $\sigma_\perp(\gamma\gamma \to X)$ — сечения реакции $\gamma\gamma \to X$ для фотонов с параллельными и перпендикулярными поляризациями соответственно, $\mathrm{d}L_{AB}^\parallel/\mathrm{d}s$ и $\mathrm{d}L_{AB}^\perp/\mathrm{d}s$ — фотон-фотонные светимости с параллельными и перпендикулярными поляризациями фотонов, $\sqrt{s}$ — инвариантная масса системы X.

Фотон-фотонные светимости:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_{AB}^\parallel}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^2 b_1 \int \mathrm{d}^2 b_2\, n\left(b_1, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\, \mathrm{e}^{y}\right)\, n\left(b_2, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\, \mathrm{e}^{-y}\right)\, P(b)\, \cos^2\varphi, \\ \frac{\mathrm{d}L_{AB}^\perp}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^2 b_1 \int \mathrm{d}^2 b_2\, n\left(b_1, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\, \mathrm{e}^{y}\right)\, n\left(b_2, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\, \mathrm{e}^{-y}\right)\, P(b)\, \sin^2\varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ — векторы от центров сталкивающихся частиц до заданной точки пространства в плоскости столкновения в момент столкновения (см. рис. 1), $n(b, \omega)$ — спектр фотонов с энергией ω на расстоянии b от заряженной частицы (см. ниже), y — быстрота системы X, $P(b)$ — вероятность избежать неэлектромагнитного взаимодействия между сталкивающимися частицами, φ — угол между векторами поляризации фотонов. Здесь и далее предполагается, что система X не участвует в сильных взаимодействиях.

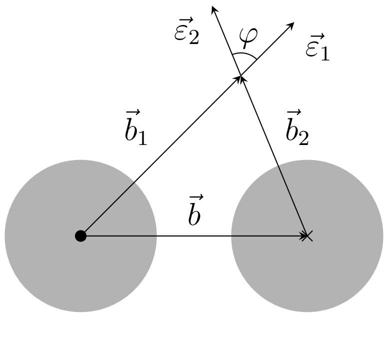

Рис. 1: Ультрапериферическое столкновение двух протонов, двигающихся перпендикулярно плоскости рисунка. $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ — радиус-векторы точки в плоскости столкновения относительно соответствующих протонов, в которой рассматривается столкновение фотонов. $b = |\vec{b}_1 - \vec{b}_2|$ — прицельный параметр столкновения. $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ — вектора поляризации фотонов.

Сечение ультрапериферического столкновения без учёта фактора подавления:

$$\sigma(AB \to ABX)|_{P=1} = \int_0^\infty \mathrm{d}s \sigma(\gamma\gamma \to X) \left. \frac{\mathrm{d}L_{AB}}{\mathrm{d}s} \right|_{P=1}, \tag{3}$$

где $L_{AB} = L_{AB}^{\parallel} + L_{AB}^{\perp}$,

$$\left. \frac{\mathrm{d}L_{AB}}{\mathrm{d}s} \right|_{P=1} = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, n\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\mathrm{e}^{y}\right) n\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\mathrm{e}^{-y}\right), \tag{4}$$

$$n(\omega) = \int \mathrm{d}^2 b \, n(b, \omega). \tag{5}$$

Спектр фотонов на расстоянии b от частицы:

$$n(b, \omega) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega} \left[\int_0^\infty \frac{F(q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)}{q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2} J_1(b q_\perp) \, q_\perp^2 \, \mathrm{d}q_\perp \right]^2, \tag{6}$$

где ω — энергия фотона, Ze — заряд частицы ($-e$ — заряд электрона), α — постоянная тонкой структуры, $F(Q^2)$ — электромагнитный формфактор частицы (Q^2 — квадрат пространственной компоненты импульса фотона), γ — фактор Лоренца частицы, $q_\perp$ — поперечный импульс фотона, $J_1(x)$ — функция Бесселя.

Спектр фотонов, проинтегрированный по всей плоскости столкновения:

$$n(\omega) = \int \mathrm{d}^2 b \, n(b, \omega) = \frac{2Z^2 \alpha}{\pi \omega} \int_0^\infty \left[\frac{F(q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)}{q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2} \right]^2 q_\perp^3 \, \mathrm{d}q_\perp. \tag{7}$$

Фактор подавления:

$$\langle S_{\gamma\gamma} \rangle_{AB} = \frac{\sigma(AB \to ABX)}{\sigma(AB \to ABX)|_{P=1}}. \tag{8}$$

Если пренебречь поляризацией фотонов:

$$(S_{\gamma\gamma})_{AB} = \frac{\mathrm{d}L/\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L/\mathrm{d}s\mathrm{d}y|_{P=1}}. \tag{9}$$

Вероятность избежать неэлектромагнитного взаимодействия в ультрапериферическом столкновении протонов:

$$P_{pp}(b) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2B}}\right)^2, \tag{10}$$

где B — эмпирический параметр, равный 21.1 ГэВ$^{-2}$ для энергии столкновения 13 ТэВ.

Фотон-фотонные светимости в столкновениях протонов:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_{pp}^{\parallel}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty b_1 \, \mathrm{d}b_1 \int_0^\infty b_2 \, \mathrm{d}b_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, n_p\left(b_1, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\,\mathrm{e}^{y}\right) n_p\left(b_2, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\,\mathrm{e}^{-y}\right) \\
&\quad \times \left\{ 1 - 2\mathrm{e}^{-\frac{b_1^2 + b_2^2}{2B}} \left[I_0\left(\frac{b_1 b_2}{B}\right) + I_2\left(\frac{b_1 b_2}{B}\right) \right] + \mathrm{e}^{-\frac{b_1^2 + b_2^2}{B}} \left[I_0\left(\frac{2b_1 b_2}{B}\right) + I_2\left(\frac{2b_1 b_2}{B}\right) \right] \right\}, \\
\frac{\mathrm{d}L_{pp}^{\perp}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty b_1 \, \mathrm{d}b_1 \int_0^\infty b_2 \, \mathrm{d}b_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, n_p\left(b_1, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\,\mathrm{e}^{y}\right) n_p\left(b_2, \tfrac{\sqrt{s}}{2}\,\mathrm{e}^{-y}\right) \\
&\quad \times \left\{ 1 - 2\mathrm{e}^{-\frac{b_1^2 + b_2^2}{2B}} \left[I_0\left(\frac{b_1 b_2}{B}\right) - I_2\left(\frac{b_1 b_2}{B}\right) \right] + \mathrm{e}^{-\frac{b_1^2 + b_2^2}{B}} \left[I_0\left(\frac{2b_1 b_2}{B}\right) - I_2\left(\frac{2b_1 b_2}{B}\right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $I_0(x)$, $I_2(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Электромагнитный формфактор протона:

$$F_p(Q^2) = \frac{1 + \mu_p Q^2/m_p^2}{(1 + Q^2/\Lambda^2)^2(1 + Q^2/m_p^2)}, \tag{12}$$

где m_p — масса протона, μ_p — магнитный момент протона, Λ — численный параметр.

Спектр эквивалентных фотонов на расстоянии b от протона:

$$\begin{aligned} n_p(b, \omega) = \frac{\alpha}{\pi^2 \omega} \Bigg[& \frac{\omega}{\gamma} K_1\left(\frac{b\omega}{\gamma}\right) - \left(1 + \frac{(\mu_p - 1)\frac{\Lambda^4}{16 m_p^4}}{\left(1 - \frac{\Lambda^2}{4m_p^2}\right)^2}\right) \sqrt{\Lambda^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\, K_1\left(b\sqrt{\Lambda^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\right) \\ & + \frac{(\mu_p - 1)\frac{\Lambda^4}{16 m_p^4}}{\left(1 - \frac{\Lambda^2}{4m_p^2}\right)^2} \sqrt{4m_p^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\, K_1\left(b\sqrt{4m_p^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\right) \\ & - \frac{1 - \frac{\mu_p \Lambda^2}{4m_p^2}}{1 - \frac{\Lambda^2}{4m_p^2}} \cdot \frac{b\Lambda^2}{2} K_0\left(b\sqrt{\Lambda^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\right)\Bigg]^2, \end{aligned} \tag{13}$$

где $K_0(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда).

Спектр эквивалентных фотонов протона, проинтегрированный по всей плоскости столкновения:

$$\begin{aligned} n_p(\omega) = \frac{\alpha}{\pi\omega} \Bigg\{ & \left(1 + 4u - 2(\mu_p - 1)\frac{u}{v}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right) \\ & + \frac{\mu_p - 1}{(v-1)^4}\left[\frac{\mu_p - 1}{v - 1}(1 + 4u + 3v) - 2\left(1 + \frac{u}{v}\right)\right] \ln\frac{u+v}{u+1} - \frac{24u^2 + 42u + 17}{6(u+1)^2} \\ & + (\mu_p - 1)\, \frac{6u^2(v^2 - 3v + 3) + 3u(3v^2 - 9v + 10) + 2v^2 - 7v + 11}{3(u+1)^2(v-1)^3} \\ & - (\mu_p - 1)^2\, \frac{24u^2 + 6u(v+7) - v^2 + 8v + 17}{6(u+1)^2(v-1)^4} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$u = \left(\frac{\omega}{\Lambda\gamma}\right)^2,\ v = \left(\frac{2m_p}{\Lambda}\right)^2. \tag{15}$$

Вероятность избежать неэлектромагнитного взаимодействия в столкновении двух ядер свинца

$$P_{\mathrm{Pb\,Pb}}(b) = \mathrm{e}^{-\sigma_{NN} T_{\mathrm{Pb\,Pb}}(b)}, \tag{16}$$

где σ_{NN} — сечение столкновения двух нуклонов соответствующей энергии,

$$T_{\mathrm{Pb\,Pb}}(b) = \int T_{\mathrm{Pb}}(\vec{\beta}) T_{\mathrm{Pb}}(|\vec{b} - \vec{\beta}|)\, \mathrm{d}^2\beta \tag{17}$$

описывает перекрытие ядер при столкновении (nuclear overlap function). Интегрирование ведётся по всей плоскости, перпендикулярной оси столкновения. Функция

$$T_{\mathrm{Pb}}(b) = \int_0^\infty \rho_{\mathrm{Pb}}(b, z)\, \mathrm{d}z \tag{18}$$

— толщина ядра на расстоянии b от центра, $\rho_{\mathrm{Pb}}(b,z)$ — ядерная плотность.

Формула Вудса-Саксона для ядерной плотности (распределение Ферми):

$$\rho_{\mathrm{Pb}}(r) = \frac{\rho_0}{1+\mathrm{e}^{\frac{r-R}{a}}}, \tag{19}$$

где r — расстояние до центра ядра, ρ_0, R, a — параметры разложения. Аналогичную формулу можно использовать для описания плотности электрического заряда ядра.

Электромагнитный формфактор есть преобразование Фурье от плотности электрического заряда:

$$F(Q^2) = \frac{\int \rho(r)\mathrm{e}^{-i\vec{Q}\vec{r}}\mathrm{d}^3r}{\int \rho(r)\mathrm{d}^3r}. \tag{20}$$

Электромагнитный формфактор ядра свинца в монопольном приближении:

$$F_1(Q^2) = \frac{1}{1+Q^2/\Lambda^2}. \tag{21}$$

Соответствующий спектр эквивалентных фотонов:

$$n_1(b,\omega) = \frac{Z^2\alpha}{\pi^2\omega}\left[\frac{\omega}{\gamma}K_1\left(\frac{b\omega}{\gamma}\right) - \sqrt{\Lambda^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2}K_1\left(b\sqrt{\Lambda^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2}\right)\right]^2. \tag{22}$$

Электромагнитный формфактор ядра свинца в разложении Фурье-Бесселя:

$$F_{\mathrm{Pb}}(Q^2) = \frac{\sin QR}{QR}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k a_k}{k^2\pi^2-Q^2R^2}}{\sum\limits_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k a_k}{k^2\pi^2}}, \tag{23}$$

где R и a_k, $k=1,\ldots,K$ — параметры разложения.

Соответствующий спектр эквивалентных фотонов:

$$n_{\mathrm{Pb}}(b,\omega) = \frac{Z^2\alpha}{\pi^2\omega R^4}\left[\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k a_k}{k^2\pi^2}\right]^{-2}\left[\sum_{k=1}^{K}(-1)^k a_k\int\limits_0^\infty \frac{x^2\sin\sqrt{x^2+y^2}J_1(cx)}{(x^2+y^2-(k\pi)^2)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\right]^2, \tag{24}$$

где $x = q_\perp R$, $y = R\omega/\gamma$, $c = b/R$. Интеграл можно представить в виде разности двух интегралов:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2\sin\sqrt{x^2+y^2}J_1(cy)}{(x^2+y^2-(k\pi)^2)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(k\pi)^2}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{x^2+y^2-(k\pi)^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{x^2\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}J_1(cy)\,\mathrm{d}x, \tag{25}$$

для которых были получены следующие представления:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2 \sin\sqrt{x^2+y^2} J_1(cy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$
$$= (c \geq 1) = yK_1(cy)$$
$$= (c < 1) = yK_1(cy) - \frac{1-c^2}{c} \cos\left(y\sqrt{1-c^2}\right) + 2iy \int\limits_0^{\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} U_1(iy(1-c\operatorname{ch} t), y\sqrt{1-c^2\operatorname{ch}^2 t}) \operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t,$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2 \sin\sqrt{x^2+y^2} J_1(cy)}{(x^2+y^2-(k\pi)^2)\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x$$
$$= (c \geq 1) = 0$$
$$= (c < 1) = \frac{1}{(k\pi)^2} \left[yK_1(cy) + \frac{\sin\left(y\sqrt{1-c^2}\right)}{cy} - \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \cos\left(y\sqrt{1-c^2}\right) \right.$$
$$- \sqrt{1-\left(\frac{y}{k\pi}\right)^2} \int\limits_0^{\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} \left[U_0\left((k\pi - \sqrt{(k\pi)^2-y^2})(1-c\operatorname{ch} t), z\sqrt{1-c^2\operatorname{ch}^2 t}\right) \right.$$
$$\left. -U_0\left((k\pi + \sqrt{(k\pi)^2-y^2})(1+c\operatorname{ch} t), y\sqrt{1-c^2\operatorname{ch}^2 t}\right) \right] \operatorname{ch} t \mathrm{d}t$$
$$\left. + 2iy \int\limits_0^{\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} U_1\left(iy(1-c\operatorname{ch} t), y\sqrt{1-c^2\operatorname{ch}^2 t}\right) \operatorname{ch} t \mathrm{d}t \right], \tag{26}$$

где $U_0(x,y)$, $U_1(x,y)$ — функции Ломмеля:

$$U_\nu(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+2n} J_{\nu+2n}(y). \tag{27}$$

Диаграмма Фейнмана для рождения пары мюонов в полуинклюзивном столкновении протонов приведена на рис. 2.

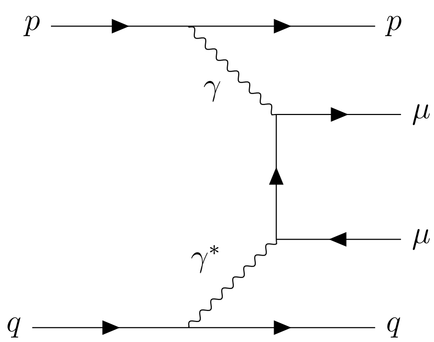

Рис. 2: Диаграмма Фейнмана для процесса $pp \to p\mu^+\mu^- X$.

Сечение рождения пары мюонов в полуинклюзивном столкновении протонов:

$$\sigma(pp \to p\mu^+\mu^- X) = 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \sum_q Q_q^2 \int\limits_{\hat{W}^2}^{\infty} \mathrm{d}W^2 \int\limits_{0}^{s\hat{q}/m_p - W^2} \frac{\sigma(\gamma\gamma^* \to \mu^+\mu^-)(Q_2^2, W^2)}{W^2 + Q_2^2} \, \mathrm{d}Q_2^2$$
$$\times \int\limits_{\frac{W^2+Q_2^2}{s\hat{q}/m_p}}^{1} f_q(x, Q_2^2) \, \mathrm{d}x \int\limits_{(W^2+Q_2^2)/x^2 s}^{(2\hat{q}\gamma)^2/(W^2+Q_2^2)} \frac{dy}{y} \frac{\ln(\hat{q}\gamma/\omega_1)}{Q_2^2 + (\omega_2/x\gamma)^2}, \quad (28)$$

где суммирование идёт по кваркам и антикваркам, Q_q — заряд кварка, W — инвариантная масса мюонной пары, Q_2^2 — минус квадрат импульса фотона, $\sigma(\gamma\gamma^* \to \mu^+\mu^-)$ — сечение рождения пары мюонов в столкновении фотонов, один из которых виртуальный, $\sqrt{s} =$ 13 ТэВ — энергия столкновения протонов, $\hat{q} = 200$ МэВ — обратный размер протона, $\hat{W}$ — ограничение на инвариантную массу мюонов, m_p — масса протона, γ — фактор Лоренца протона, $y = \omega_1/\omega_2$, ω_1, ω_2 — энергии фотонов, x — доля энергии протона, которую несёт кварк q, $f_q(x, Q_2^2)$ — партонная функция распределения для кварка q.

Список литературы

[1] The ATLAS Collaboration. Measurement of the exclusive $\gamma\gamma \to \mu^+\mu^-$ process in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. Phys.Lett. B 777, 303 (2018).

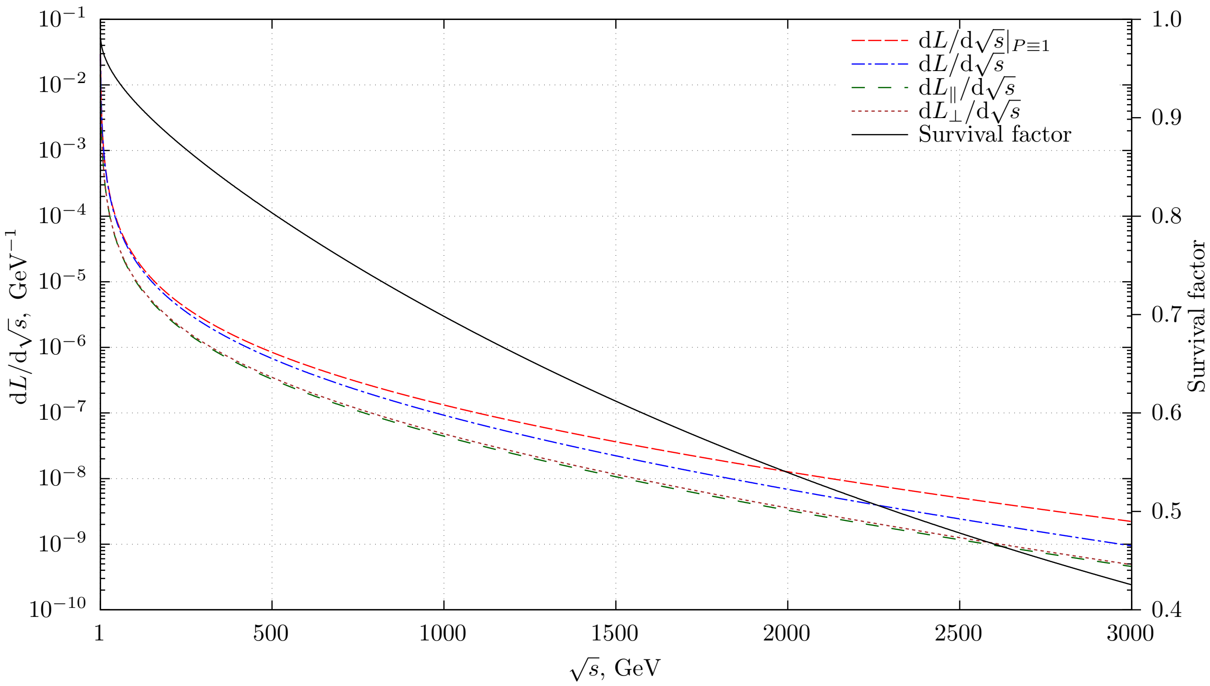

Рис. 3: Фактор подавления (правая шкала) и соответствующие фотон-фотонные светимости (левая шкала) в столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ. Здесь $\sqrt{s}$ — инвариантная масса рождённой системы.

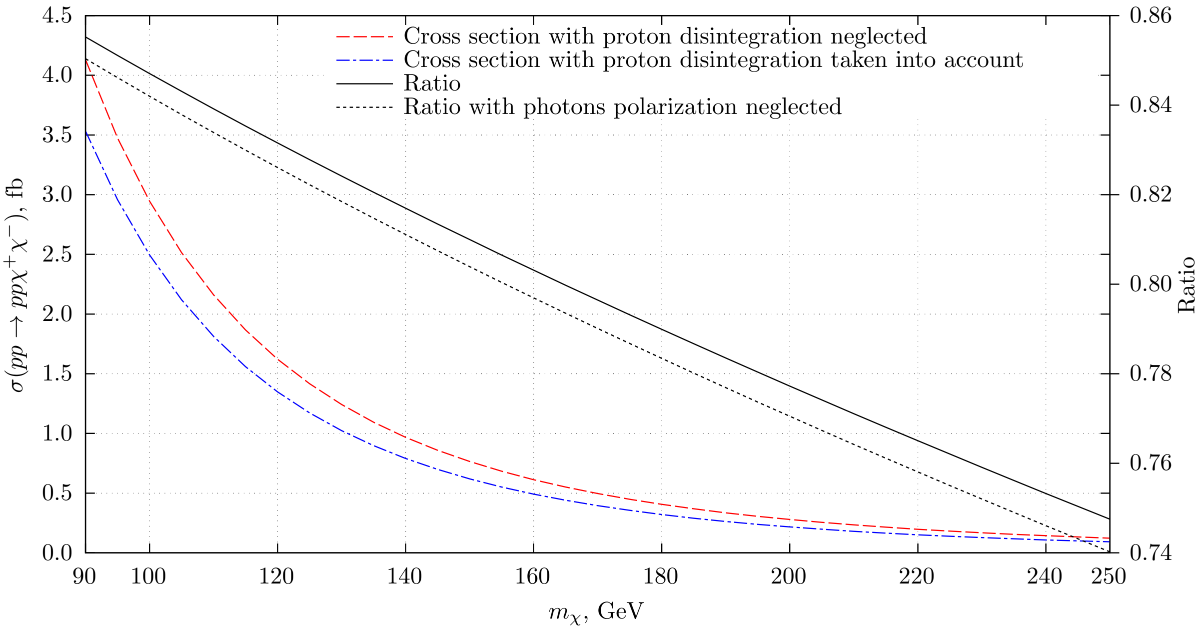

Рис. 4: Сечения (левая шкала) и их отношения (правая шкала) рождения пары заряженных фермионов $\chi^+\chi^-$ в ультрапериферических столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ в зависимости от массы частицы. Чёрная пунктирная линия (правая шкала) — это отношение сечений если пренебречь поляризацией фотонов в ультрапериферических столкновениях. Соответствующее сечение не показано, так как на этом рисунке его будет сложно отличить от синей штрих-пунктирной линии.

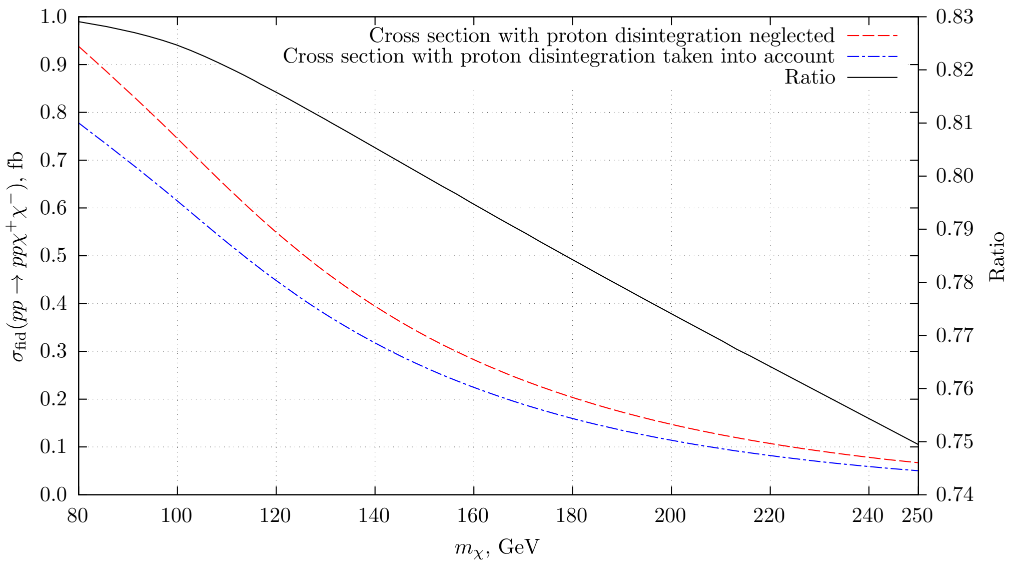

Рис. 5: Сечения (левая шкала) и их отношения (правая шкала) рождения пары заряженных фермионов $\chi^+\chi^-$ в ультрапериферических столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ в зависимости от массы частицы. Требуется, чтобы у обеих частиц поперечный импульс был не меньше 20 ГэВ, а псевдобыстрота не больше 2.5; оба протона должны попасть в передние детекторы.

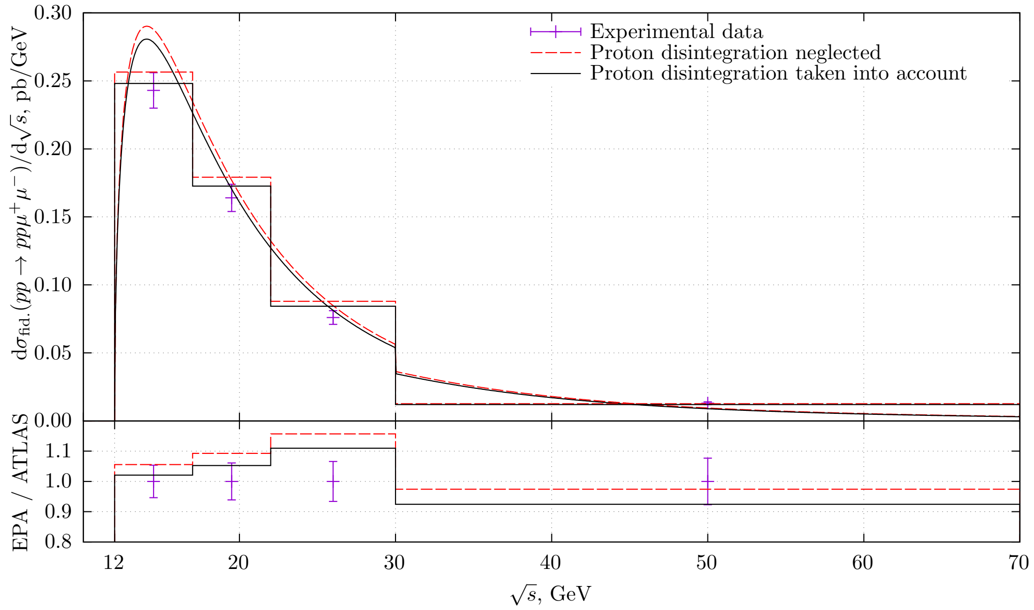

Рис. 6: *Вверху:* Сечение реакции $pp \to pp\mu^+\mu^-$ для энергии столкновения 13 ТэВ с дополнительными требованиями к каждому мюону: поперечный импульс каждого мюона больше 6 ГэВ в интервале инвариантных масс 12 ГэВ $< \sqrt{s} <$ 30 ГэВ и больше 10 ГэВ для 30 ГэВ $< \sqrt{s} <$ 70 ГэВ; псевдобыстрота каждого мюона не больше 2.4. Точки — результаты измерений [1]. Красная пунктирная линия — дифференциальное сечение без учёта фактора подавления. Чёрная сплошная линия — дифференциальное сечение с учётом фактора подавления. Гистограммы — соответствующие сечения, проинтегрированные в тех же интервалах, что и точки. *Внизу:* отношение вычисленных сечений к результатам измерений.

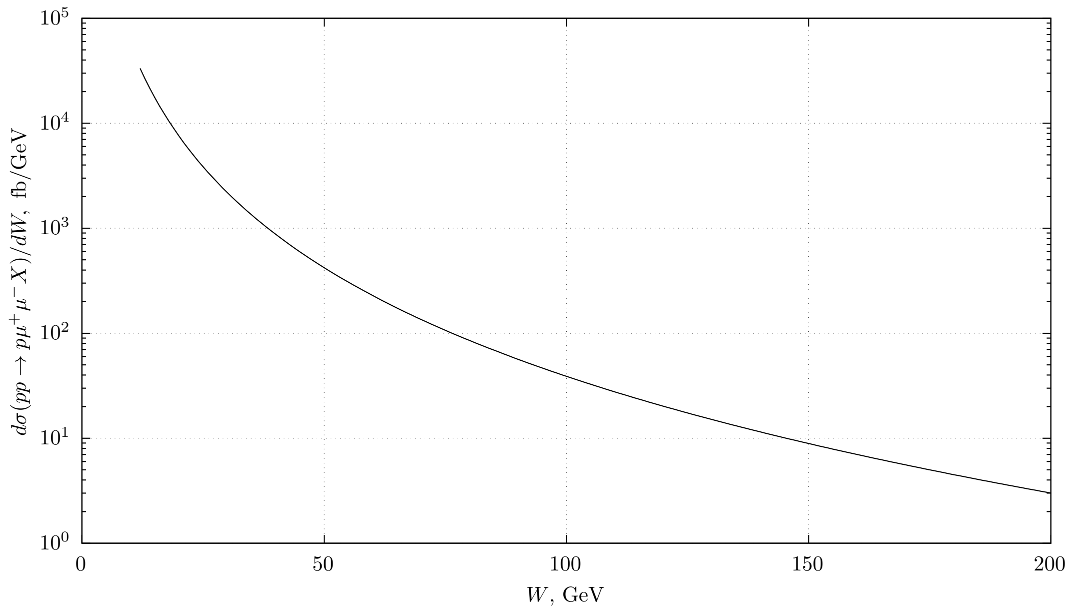

Рис. 7: Спектр пар мюонов, рождённых в полуинклюзивном столкновении протонов с энергией 13 ТэВ.