

Дополнительные материалы  
к отчёту о выполнении проекта № 19-12-00123  
«Мюонные аномалии, ультрапериферические столкновения на ЛНС и  
суперсимметрия»  
в 2020 году

Сечение ультрапериферического столкновения без учёта фактора подавления:

$$\sigma(AB \rightarrow ABX) = \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 \sigma(\gamma\gamma \rightarrow X) n_A(\omega_1) n_B(\omega_2), \quad (1)$$

где

$$n(\omega) = \frac{2Z^2\alpha}{\pi\omega} \int_0^\infty \left[ \frac{F(q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)}{q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2} \right]^2 q_\perp^3 dq_\perp \quad (2)$$

— спектр эквивалентных фотонов,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $Ze$  — заряд частицы-источника фотонов,  $\gamma$  — её фактор Лоренца,  $F$  — её электромагнитный формфактор,  $q_\perp$  — поперечный импульс фотона.

Сечение ультрапериферического столкновения с учётом фактора подавления:

$$\sigma(AB \rightarrow ABX) = \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 \sigma(\gamma\gamma \rightarrow X) \int d^2b_1 \int d^2b_2 n_A(b_1, \omega_1) n_B(b_2, \omega_2) P_{AB}(|\vec{b}_1 - \vec{b}_2|), \quad (3)$$

где

$$n(b, \omega) = \frac{Z^2\alpha}{\pi^2\omega} \left[ \int_0^\infty \frac{F(q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)}{q_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2} J_1(bq_\perp) q_\perp^2 dq_\perp \right]^2 \quad (4)$$

— спектр эквивалентных фотонов на расстоянии  $b$  от частицы-источника,  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого рода,  $P_{AB}(b)$  — вероятность частицам  $A$  и  $B$  избежать неэлектромагнитных взаимодействий в столкновении с импакт параметром  $b$ .

Фотон-фотонная светимость в ультрапериферических столкновениях с учётом фактора подавления:

$$\frac{dL_{AB}}{ds} = \int_0^\infty \frac{dx}{8x} \int d^2b_1 \int d^2b_2 n_A\left(b_1, \sqrt{\frac{sx}{4}}\right) n_B\left(b_2, \sqrt{\frac{s}{4x}}\right) P_{AB}(|\vec{b}_1 - \vec{b}_2|); \quad (5)$$

без учёта фактора подавления:

$$\left. \frac{dL_{AB}}{ds} \right|_{P=1} = \int_0^\infty \frac{dx}{8x} n_A\left(\sqrt{\frac{sx}{4}}\right) n_B\left(\sqrt{\frac{s}{4x}}\right). \quad (6)$$

Здесь  $s = 4\omega_1\omega_2$  — инвариантная масса родившейся системы,  $x = \omega_1/\omega_2$ .

Фактор подавления:

$$S_{\gamma\gamma}^2 = \frac{dL_{AB}/ds}{dL_{AB}/ds|_{P=1}}. \quad (7)$$

Электромагнитный формфактор протона [1]

$$F_p(Q^2) \approx \frac{1}{(1 + Q^2/\Lambda^2)^2}, \quad (8)$$

где  $Q^2 = -q^2$ ,  $q$  — 4-импульс фотона,  $\Lambda$  — постоянная (для предварительных расчётов использовано значение  $\Lambda^2 = 0.71 \text{ ГэВ}^2$ ). Тогда спектры эквивалентных фотонов у протона

$$n_p(\omega) = \frac{\alpha}{\pi\omega} \left[ (4a + 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - \frac{24a^2 + 42a + 17}{6(a + 1)^2} \right], \quad a = (\omega/\Lambda\gamma)^2 \quad [2], \quad (9)$$

$$n_p(b, \omega) = \frac{\alpha}{\pi^2\omega} \left[ \frac{\omega}{\gamma} K_1 \left( \frac{b\omega}{\gamma} \right) - \sqrt{\Lambda^2 + \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} K_1 \left( b\sqrt{\Lambda^2 + \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} \right) - \frac{b\Lambda^2}{2} K_0 \left( b\sqrt{\Lambda^2 + \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} \right) \right]^2, \quad (10)$$

где  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдоналда).

Вероятность избежать неэлектромагнитного взаимодействия в ультрапериферическом столкновении протонов [3]

$$P_{pp}(b) = \left( 1 - e^{-\frac{b^2}{2B}} \right)^2, \quad (11)$$

где  $B = 19.7 \text{ ГэВ}^{-2}$  [4].

Электромагнитный формфактор ядра свинца в разложении Фурье-Бесселя

$$F_{\text{Pb}}(Q^2) = \frac{\sin QR}{QR} \cdot \frac{\sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k a_k}{k^2 \pi^2 - Q^2 R^2}}{\sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k a_k}{k^2 \pi^2}}, \quad (12)$$

где  $R$  и  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  — параметры разложения.

Соответствующий спектр эквивалентных фотонов:

$$n_{\text{Pb}}(b, \omega) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega R^4} \left[ \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k a_k}{k^2 \pi^2} \right]^{-2} \left[ \sum_{k=1}^K (-1)^k a_k \int_0^\infty \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} J_1(cx)}{(x^2 + y^2 - (k\pi)^2)(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx \right]^2, \quad (13)$$

где  $x = q_\perp R$ ,  $y = R\omega/\gamma$ ,  $c = b/R$ . Интеграл можно представить в виде разности двух интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} J_1(cy)}{(x^2 + y^2 - (k\pi)^2)(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{x^2 + y^2 - (k\pi)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_1(cy) dx, \quad (14)$$

для которых были получены следующие представления (предварительный результат):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} J_1(cx)}{(x^2 + y^2 - (k\pi)^2) \sqrt{x^2 + y^2}} dx \\
&= (c > 1) = 0 \\
&= (c < 1, y > k\pi) = -\frac{\sin(y\sqrt{1-c^2})}{cy} - 2\frac{\sqrt{y^2 - (k\pi)^2}}{k\pi} \times \\
&\quad \times \int_0^{\ln \frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( 2n \operatorname{arctg} \frac{k\pi}{\sqrt{z^2 - (k\pi)^2}} \right) \left( \frac{1-c \operatorname{ch} t}{1+c \operatorname{ch} t} \right)^n J_{2n}(y\sqrt{1-c^2} \operatorname{ch}^2 t) \operatorname{ch} t dt \\
&= (c < 1, y < k\pi) = -\frac{\sin(y\sqrt{1-c^2})}{cy} - \frac{\sqrt{(k\pi)^2 - z^2}}{k\pi} \times \\
&\quad \times \int_0^{\ln \frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \left( \sqrt{\left( \frac{k\pi}{z} \right)^2 - 1} + \frac{k\pi}{z} \right)^{2n} - \left( \sqrt{\left( \frac{k\pi}{z} \right)^2 - 1} - \frac{k\pi}{z} \right)^{-2n} \right] \left[ \frac{1-c \operatorname{ch} t}{1+c \operatorname{ch} t} \right]^n \times \\
&\quad \quad \quad \times J_{2n}(y\sqrt{1-c^2} \operatorname{ch}^2 t) \operatorname{ch} t dt \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} J_1(cx)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \\
&= (c > 1) = yK_1(cy) \\
&= (c < 1) = yK_1(cy) + \frac{1-c^2}{c} \cos(y\sqrt{1-c^2}) + 2y \int_0^{\ln \frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1-c \operatorname{ch} t}{1+c \operatorname{ch} t} \right)^{n+\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \quad \quad \times J_{2n+1}(z\sqrt{1-c^2} \operatorname{ch}^2 t) \operatorname{ch} t dt. \tag{16}
\end{aligned}$$

Эти преобразования позволяют перейти от интегрирования произведения осциллирующих функций на полубесконечном интервале к интегрированию ряда осциллирующих функций на конечном интервале. Ожидается, что численное интегрирование во втором случае будет проще.

Электромагнитный формфактор ядра свинца в монопольном приближении:

$$F_1(Q^2) = \frac{1}{1 + Q^2/\Lambda^2}, \tag{17}$$

где  $\Lambda = 80$  МэВ для данных работы [5] и  $\Lambda = 50$  МэВ для данных работы [6].

Спектры эквивалентных фотонов для монопольного формфактора:

$$n_1(\omega) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi \omega} \left[ (2a + 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - 2 \right], \quad a = (\omega/\Lambda\gamma)^2 \quad [2] \tag{18}$$

$$n_1(b, \omega) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega} \left[ \frac{\omega}{\gamma} K_1 \left( \frac{b\omega}{\gamma} \right) - \sqrt{\Lambda^2 + \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} K_1 \left( b \sqrt{\Lambda^2 + \left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} \right) \right]^2. \tag{19}$$

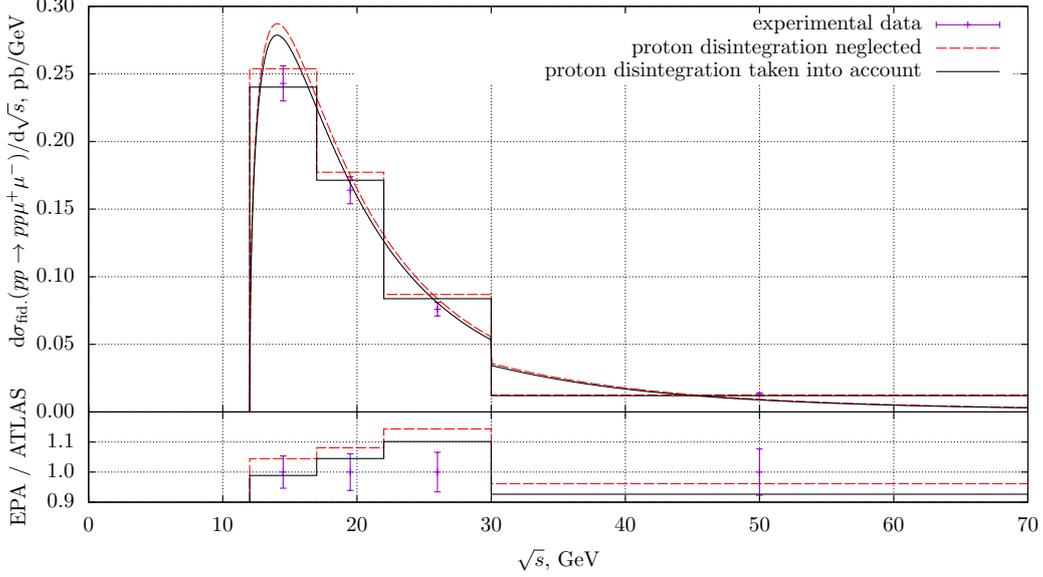


Рис. 1: Дифференциальное сечение рождения пары мюонов в ультрапериферических столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ с учётом экспериментальных обрезаний на фазовое пространство: в области инвариантных масс  $12 < \sqrt{s} < 30$  ГэВ поперечный импульс каждого мюона  $p_T > 6$  ГэВ; в области  $30 < \sqrt{s} < 70$  ГэВ  $p_T > 10$  ГэВ; всюду псевдобыстрота каждого мюона  $|\eta| < 2.4$ . Точки — значения, полученные коллаборацией ATLAS [8]. Красная пунктирная линия — расчёт без учёта фактора подавления [2]. Чёрная линия — расчёт с учётом фактора подавления.

Вероятность избежать неэлектромагнитного взаимодействия в столкновении двух ядер свинца [7]

$$P_{\text{Pb Pb}}(b) = e^{-\sigma_{NN}T_{\text{Pb Pb}}(b)}, \quad (20)$$

где  $\sigma_{NN}$  — сечение столкновения двух нуклонов соответствующей энергии,

$$T_{\text{Pb Pb}}(b) = \int T_{\text{Pb}}(\vec{\beta})T_{\text{Pb}}(|\vec{b} - \vec{\beta}|) d^2\beta \quad (21)$$

описывает перекрытие ядер при столкновении (nuclear overlap function). Интегрирование ведётся по всей плоскости, перпендикулярной оси столкновения. Функция

$$T_{\text{Pb}}(b) = \int_0^\infty \rho_{\text{Pb}}(b, z) dz \quad (22)$$

— толщина ядра на расстоянии  $b$  от центра,  $\rho_{\text{Pb}}(b, z)$  — ядерная плотность.

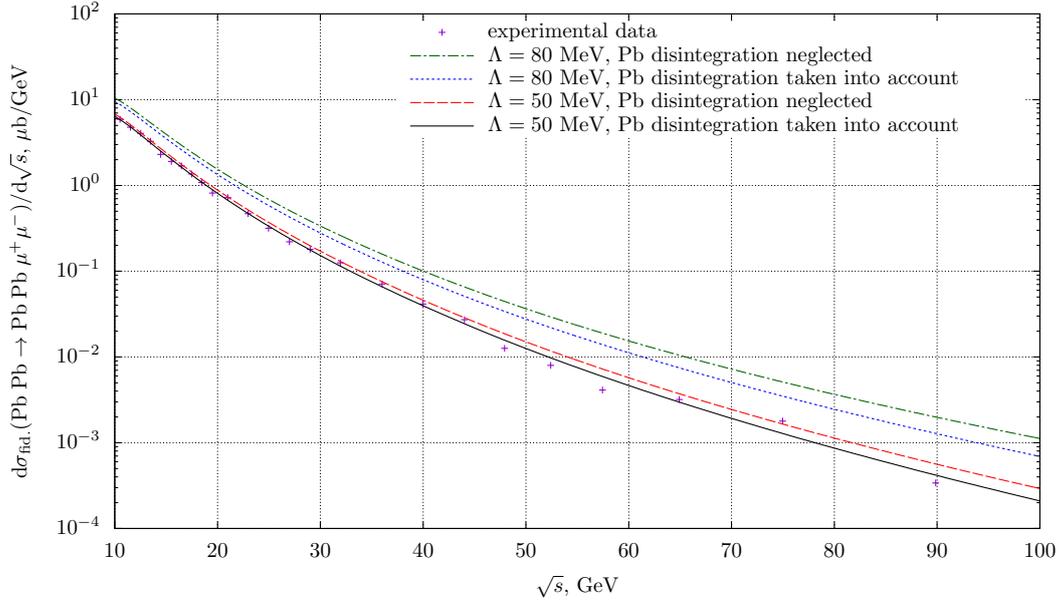


Рис. 2: (Предварительный результат) Дифференциальное сечение рождения пары мюонов в ультрапериферических столкновениях ядер  $^{208}\text{Pb}$  с энергией 5.02 ТэВ/(пара нуклонов) с учётом экспериментальных обрезаний на фазовое пространство: поперечный импульс каждого мюона  $p_T > 4$  ГэВ; псевдобыстрота каждого мюона  $|\eta| < 2.4$ . Расчёт сделан для монополярных формфакторов с параметрами  $\Lambda = 80$  МэВ и 50 МэВ и с вероятностью избежать неэлектромагнитного взаимодействия, аппроксимированной формулой для протонов (11), но с параметром  $B = R_{\text{Pb}}^2$ , где  $R_{\text{Pb}} = 5.5$  фм — радиус ядра свинца [5].

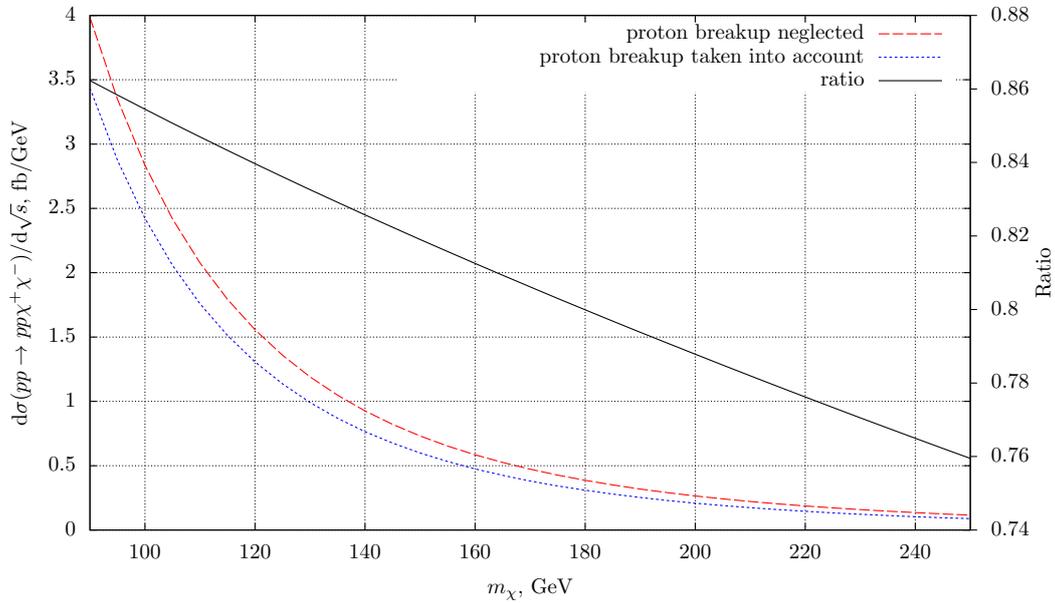


Рис. 3: Левая шкала: дифференциальное сечение рождения пары заряженных частиц в ультрапериферических столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ в зависимости от массы частиц с учётом (синяя штриховая линия) и без учёта (красная пунктирная линия) фактора подавления. Правая шкала: отношение сечений (чёрная сплошная линия).

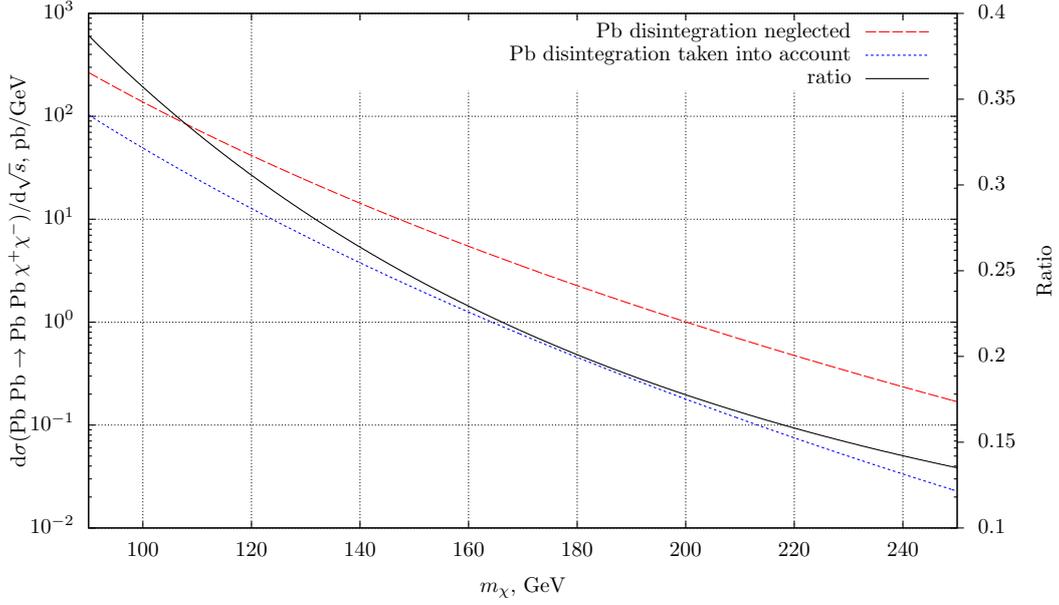


Рис. 4: (Предварительный результат) Левая шкала: дифференциальное сечение рождения пары заряженных частиц в ультрапериферических столкновениях ядер свинца с энергией 5.03 ТэВ/(пара нуклонов) в зависимости от массы частиц с учётом (синяя пунктирная линия) и без учёта (красная штриховая линия) фактора подавления. Правая шкала: отношение сечений (чёрная сплошная линия). Расчёт сделан для монополюсного формфактора с параметром  $\Lambda = 80$  МэВ и с вероятностью избежать неэлектромагнитного взаимодействия, аппроксимированной формулой для протонов (11), но с параметром  $B = R_{\text{Pb}}^2$ , где  $R = 5.5$  фм — радиус ядра свинца [5].

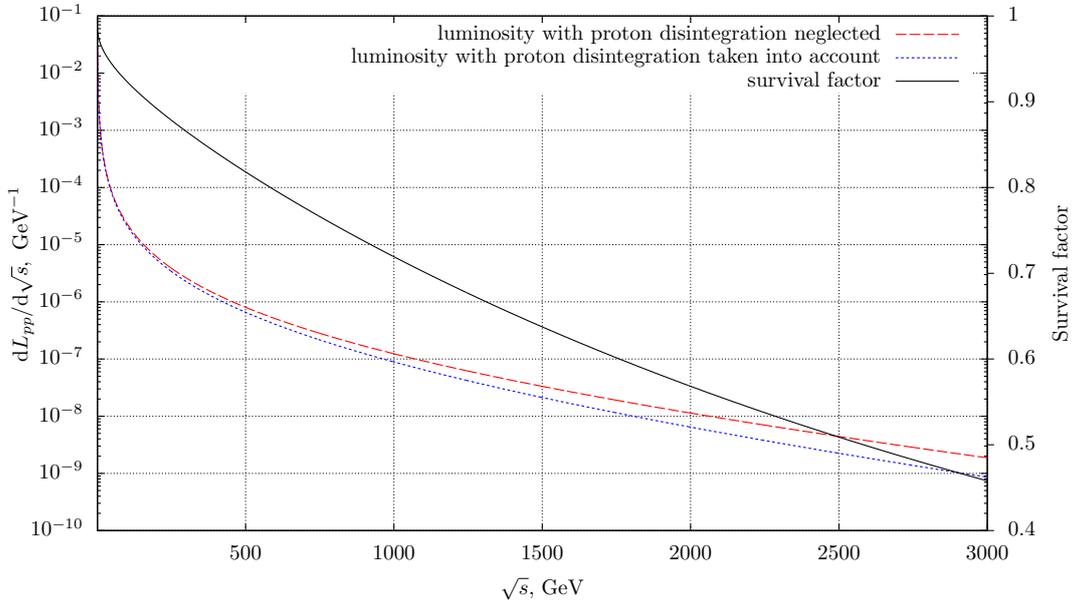


Рис. 5: Левая шкала: фотон-фотонные светимости в ультрапериферических столкновениях протонов с энергией 13 ТэВ с учётом (синяя пунктирная линия) и без учёта (красная штриховая линия) фактора подавления. Правая шкала: фактор подавления (отношение светимостей; чёрная сплошная линия).

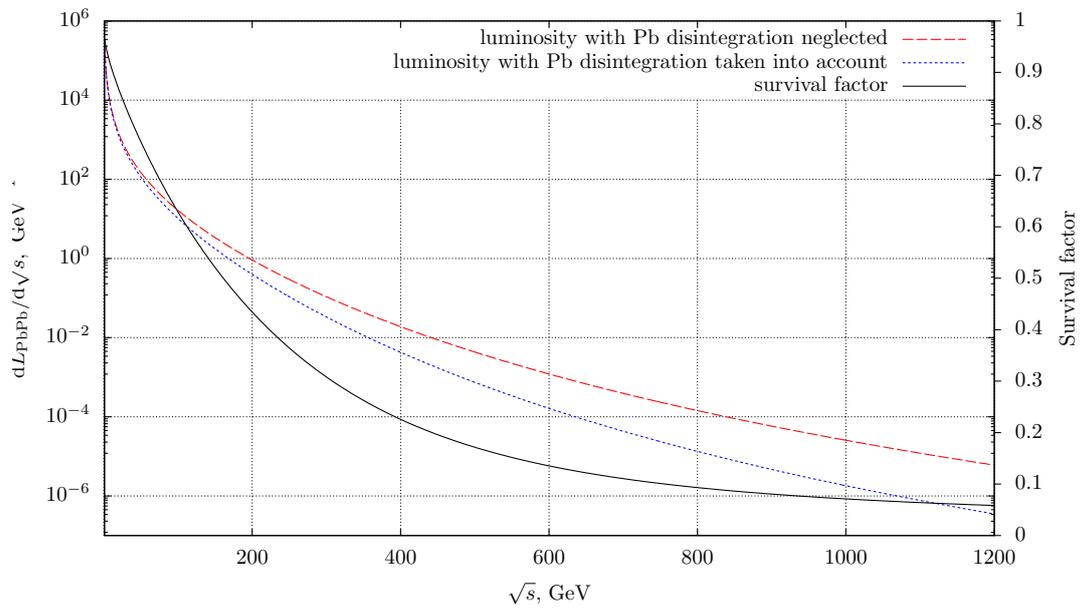
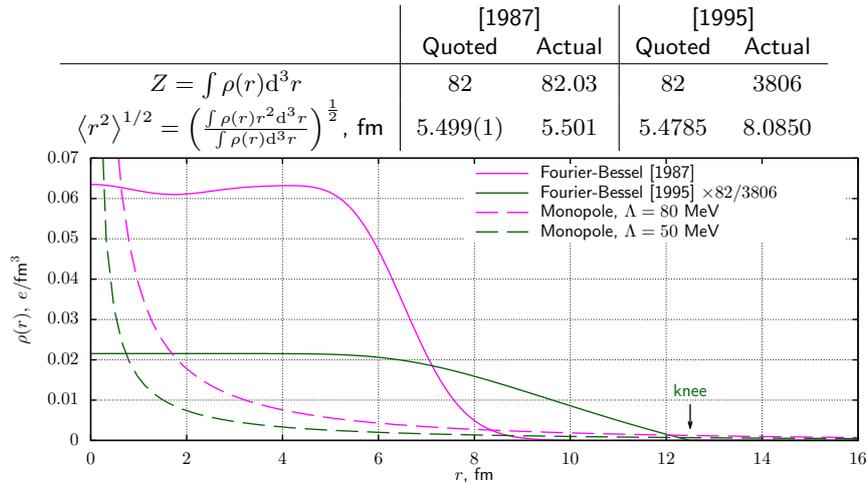


Рис. 6: (Предварительный результат) Левая шкала: фотон-фотонные светимости в ультрапериферических столкновениях ядер свинца с энергией 5.02 ТэВ/(пара нуклонов) с учётом (синяя пунктирная линия) и без учёта (красная штриховая линия) фактора подавления. Правая шкала: фактор подавления (отношение светимостей; чёрная сплошная линия).

## $^{208}\text{Pb}$ charge density

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^N a_k j_0(k\pi r/R) \theta(R-r), \quad F(q) = \frac{\int \rho(r) e^{iqr} d^3r}{\int \rho(r) d^3r}$$



[1987]: At.Data and Nucl.Data Tabl. 36, 495 (1987)

[1995]: At.Data and Nucl.Data Tabl. 60, 177 (1995)

E. V. Zhemchugov

EPA: survival factor

13/11

Рис. 7: Внутренние несоответствия, обнаруженные в параметрах  $a_k$  и  $R$  представления электромагнитного формфактора ядра  $^{208}\text{Pb}$  в данных работы [6]. В таблице в колонках “Quoted” представлены заряд и среднеквадратичный радиус ядра свинца, как они приведены в работах [5] и [6], а в колонках “Actual” — результат вычисления по соответствующим формулам. На графике нарисованы зависимости плотности заряда от расстояния до центра ядра. Плотность заряда для работы [5] перенормирована, чтобы полный заряд равнялся 82. На расстоянии  $r = R = 12.5$  фм в этой плотности есть излом. На графике также для сравнения приведены плотности, соответствующие монополюльным формфакторам с различными параметрами. Слайд взят из доклада Е.В. Жемчугова на конференции 5th international conference on particle physics and astrophysics. Москва, 5-9 октября 2020.

## Список литературы

- [1] S. Pacetti, R. B. Ferrolì, E. Tomasi-Gustafsson. Proton electromagnetic form factors: basic notions, present achievements and future perspectives. *Phys.Rep.* 550, 1 (2015).
- [2] M. Vysotsky, E. Zhemchugov. Equivalent photons in proton-proton and ion-ion collisions at the LHC. *Physics-Uspekhi* 189, 975 (2019).
- [3] L. Frankfurt, Ch. E. Hyde, M. Strikman, C. Weiss. *Generalized parton distributions and rapidity gap survival in exclusive diffractive pp scattering.* *Phys.Rev.* D75, 054009 (2007).
- [4] The ATLAS Collaboration. Measurement of the total cross section from elastic scattering in *pp* collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV with the ATLAS detector. *Nucl.Phys.* B889, 486 (2014).
- [5] H. de Vries, C. W. de Jager, C. de Vries. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 36, 495 (1987).
- [6] G. Fricke, C. Bernhardt, K. Heilig, L. A. Schaller *et al.* Nuclear ground state charge radii from electromagnetic interactions. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 60, 177 (1995).
- [7] D. d'Enterria. Hard scattering cross sections at LHC in Glauber approach: from *pp* to *pA* to *AA* collisions. arXiv:nucl-ex/0302016.
- [8] The ATLAS Collaboration. Measurement of the exclusive  $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$  process in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV with the ATLAS detector. *Phys.Lett.* B 777, 303 (2018).