

# 1 Численное интегрирование

Формфактор, представленный в виде разложения Фурье-Бесселя:

$$F(q) = \frac{\sin qR \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2 - (qR)^2}}{qR \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2}}, \quad (1)$$

где  $a_k$ ,  $R$  — параметры разложения (константы).  $\sin qR$  имеет нули при  $qR = k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ; остальная часть этой формулы есть рациональная функция, которая имеет полюсы первого порядка при  $qR = k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . То есть, рациональная функция убирает первые  $N$  нулей синуса, а при  $qR > N\pi$  функция становится осциллирующей. Конкретно у формфактора 1987 года [1] (коэффициенты представлены в таблице 1), есть 7 нулей в области  $qR < N\pi$  ( $N = 13$ ; см. обсуждение ниже и таблицу 2).

Спектр эквивалентных фотонов в зависимости от импакт-фактора  $b$ :

$$\begin{aligned} n(b, \omega) &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega} \left[ \int_0^\infty \frac{F\left(\sqrt{q_\perp^2 + (\omega/\gamma)^2}\right)}{q_\perp^2 + (\omega/\gamma)^2} q_\perp^2 J_1(bq_\perp) dq_\perp \right]^2 \\ &= \left( x = q_\perp R, z = \frac{R\omega}{\gamma} \right) \\ &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega R^2} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \right]^{-2} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{x^2 + z^2 - (k\pi)^2} \frac{\sin \sqrt{x^2 + z^2}}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} J_1\left(\frac{bx}{R}\right) dx \right]^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Зависимость подынтегральной функции от переменной интегрирования для  $b = 1.23 \text{ ГэВ}^{-1} = 0.243 \text{ фм}$  и  $\omega = 823 \text{ ГэВ}$  представлена на рисунке 1. Это довольно характерная картина

Таблица 1: Параметры формфактора  $^{208}\text{Pb}$  (1).

Ссылка	[1]	[2]
$R$ , фм	11.0	12.5
$a_1$	$0.62732 \times 10^{-1}$	$1.4396 \times 10^0$
$a_2$	$0.38542 \times 10^{-1}$	$-4.1850 \times 10^{-1}$
$a_3$	$-0.55105 \times 10^{-1}$	$-9.1763 \times 10^{-2}$
$a_4$	$-0.26990 \times 10^{-2}$	$6.8006 \times 10^{-2}$
$a_5$	$0.31016 \times 10^{-1}$	$2.6476 \times 10^{-2}$
$a_6$	$-0.99486 \times 10^{-2}$	$-1.5307 \times 10^{-2}$
$a_7$	$-0.93012 \times 10^{-2}$	$-7.1246 \times 10^{-3}$
$a_8$	$0.76653 \times 10^{-2}$	$2.7987 \times 10^{-3}$
$a_9$	$0.20885 \times 10^{-2}$	$2.3767 \times 10^{-3}$
$a_{10}$	$-0.17840 \times 10^{-2}$	$-1.0125 \times 10^{-3}$
$a_{11}$	$0.74876 \times 10^{-4}$	$-2.5836 \times 10^{-4}$
$a_{12}$	$0.32278 \times 10^{-3}$	$6.4297 \times 10^{-5}$
$a_{13}$	$-0.11353 \times 10^{-3}$	$6.5528 \times 10^{-5}$
$a_{14}$		$1.4523 \times 10^{-5}$
$a_{15}$		$-1.4430 \times 10^{-5}$

для фотонов высоких энергий. Конкретно в данном случае проблема в том, что интеграл с высокой точностью равен 0. Наблюдаются биения между функцией Бесселя и синусом с уменьшающейся амплитудой. Такое поведение сводит с ума обычные алгоритмы численного интегрирования, так как они не могут гарантировать, что им удалось описать все экстремумы конечным числом точек до того, как набежавшая численная ошибка превысит заданный предел точности.

На рисунке 2 представлена подынтегральная функция для параметров  $b = 253 \text{ ГэВ}^{-1} = 50.0 \text{ фм}$  и  $\omega = 823 \text{ ГэВ}$ .

Для численного интегрирования я использовал следующий алгоритм. Нули функций  $J_1(bq_\perp)$  и  $F\left(\sqrt{q_\perp^2 + (\omega/\gamma)^2}\right)$  разбивают  $[0; \infty)$  на отрезки. На каждом таком отрезке функция имеет ровно один экстремум, поэтому она легко интегрируется обычными квадратурами. Обычно хватает одного уровня рекурсии; при этом функция вычисляется в 41 точке (используется метод Гаусса-Кронрода для 41 точки), то есть, функция описывается довольно точно. Основная проблема заключается в том, когда следует останавливать вычисление. Я пришёл к следующему набору условий:

1.  $R\sqrt{q_\perp^2 + (\omega/\gamma)^2} > N\pi$ , то есть, мы вышли за пределы области, описываемой рациональным приближением в числителе (1).
2.  $\left|\frac{\Delta I}{I}\right| < \varepsilon$ , где  $I$  — текущее значение интеграла,  $\Delta I$  — его приращение на последнем отрезке,  $\varepsilon = 10^{-7}$  — параметр, характеризующий точность расчёта.
3. Предыдущие условия выполнены на 3 итерациях подряд — иначе расчёт останавливался на первой же деструктивной фазе биений.
4. ИЛИ  $q_\perp > 100N\pi/R = 73.3 \text{ ГэВ}$  — когда интеграл очень близок к 0, биения можно интегрировать очень долго.

Нули функции Бесселя я беру через один — идея была в том, чтобы отдать контроль численной точности библиотеке GSL и отслеживать изменения интеграла  $\Delta I$  за целый период. Я не проверял, даёт ли это действительно какое-то преимущество. При этом нули формфактора у меня сейчас берутся подряд, в том числе в области больших  $q_\perp$ .

Нули формфактора 1987 года [1] при  $qR \leq N\pi$  приведены в таблице 2. Я их вычислил методом Ньютона. Нули формфактора при  $qR > N\pi$  — это нули  $\sin qR$ :  $q_{\perp,k} = \sqrt{(k\pi/R)^2 - (\omega/\gamma)^2}$ ,  $k = N + 1, N + 2, \dots$

Приведённый алгоритм не гарантирует сходимость к правильному решению с точностью  $\varepsilon$  и вообще отрабатывает не всегда, но это пока что всё, что у меня получилось сделать. В частности, он плохо работает в области больших  $\omega$  и  $b$ , так как там осцилляции идут очень часто, и небольшие изменения в  $\omega$  могут приводить к тому, что захватывается

Таблица 2: Нули формфактора (1) с параметрами из таблицы 1.  
 $q_\perp$ , ГэВ

1	0.13085958235594836
2	0.22726772163420080
3	0.32311596237126694
4	0.41770592220340624
5	0.52237797957219830
6	0.61675341350945600
7	0.71451213897385860

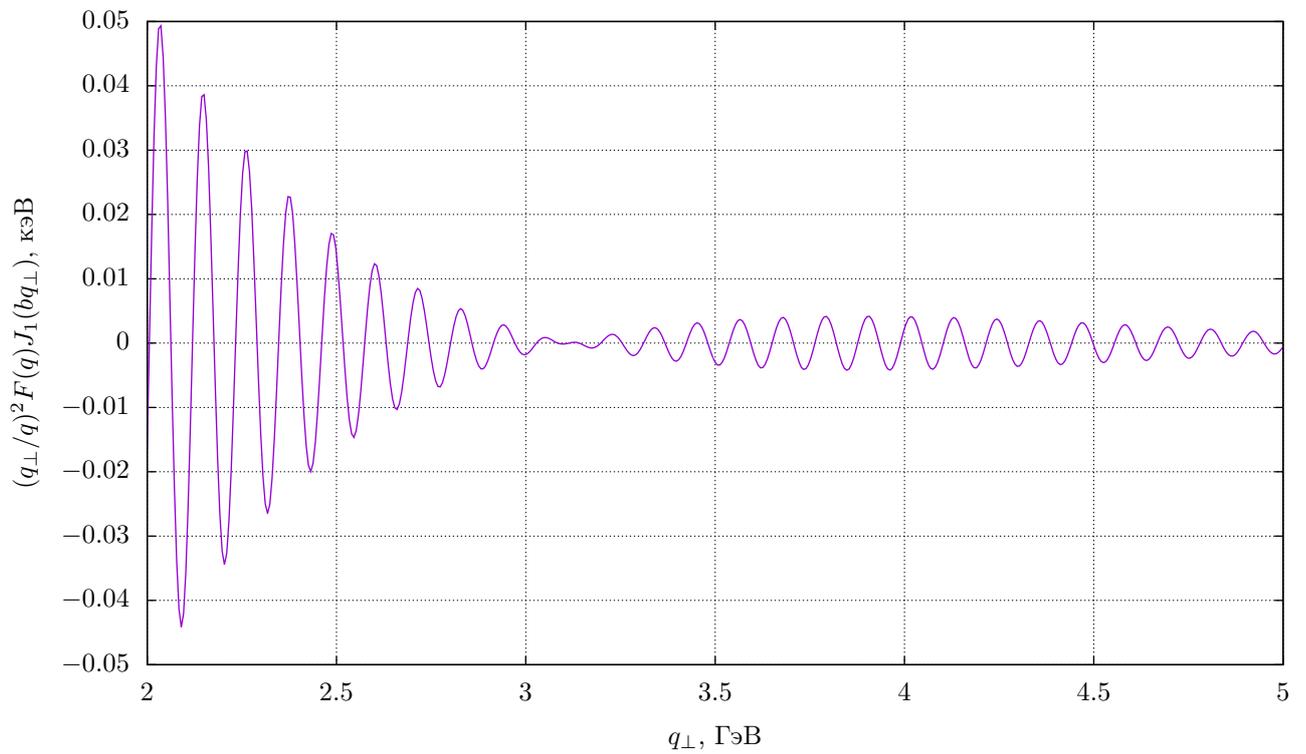
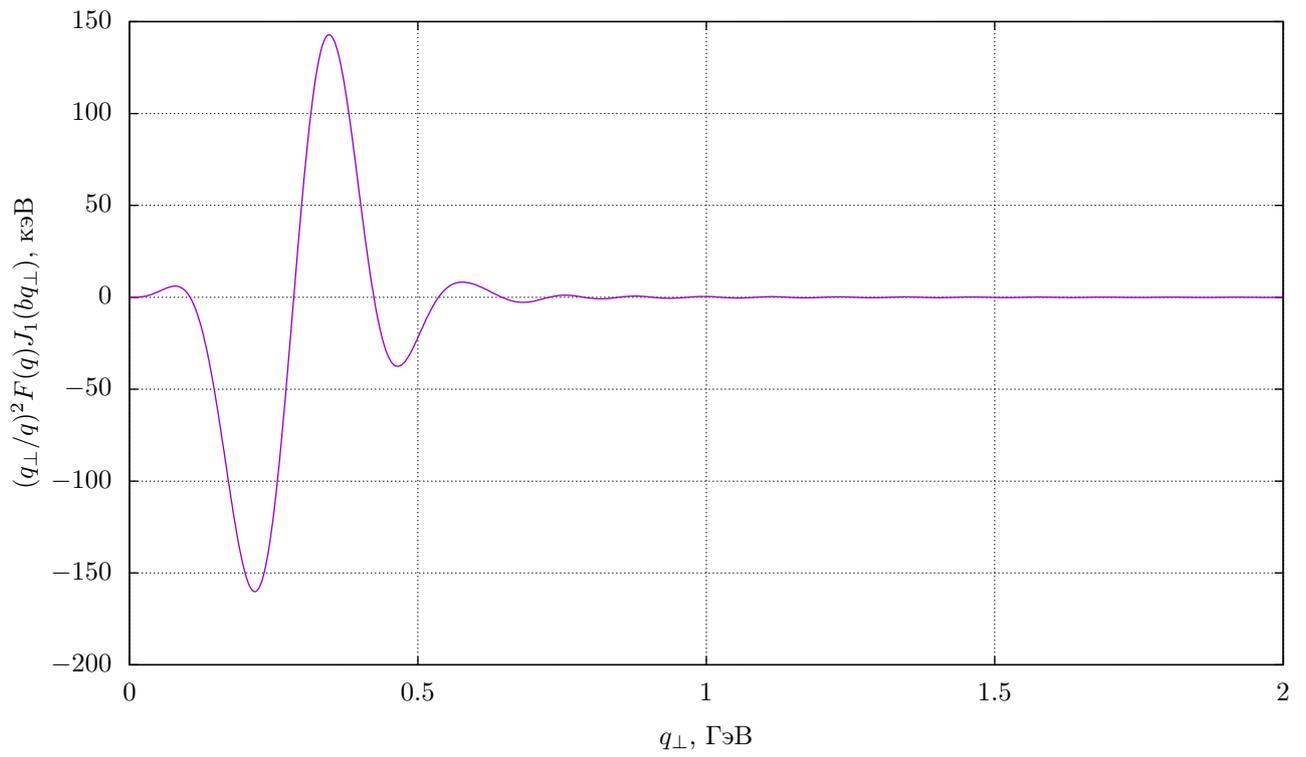


Рис. 1:  $(q_{\perp}/q)^2 F(q) J_1(bq_{\perp})$  для формфактора  $^{208}\text{Pb}$  из [1] при  $b = 0.243$  фм,  $\omega = 823$  ГэВ.

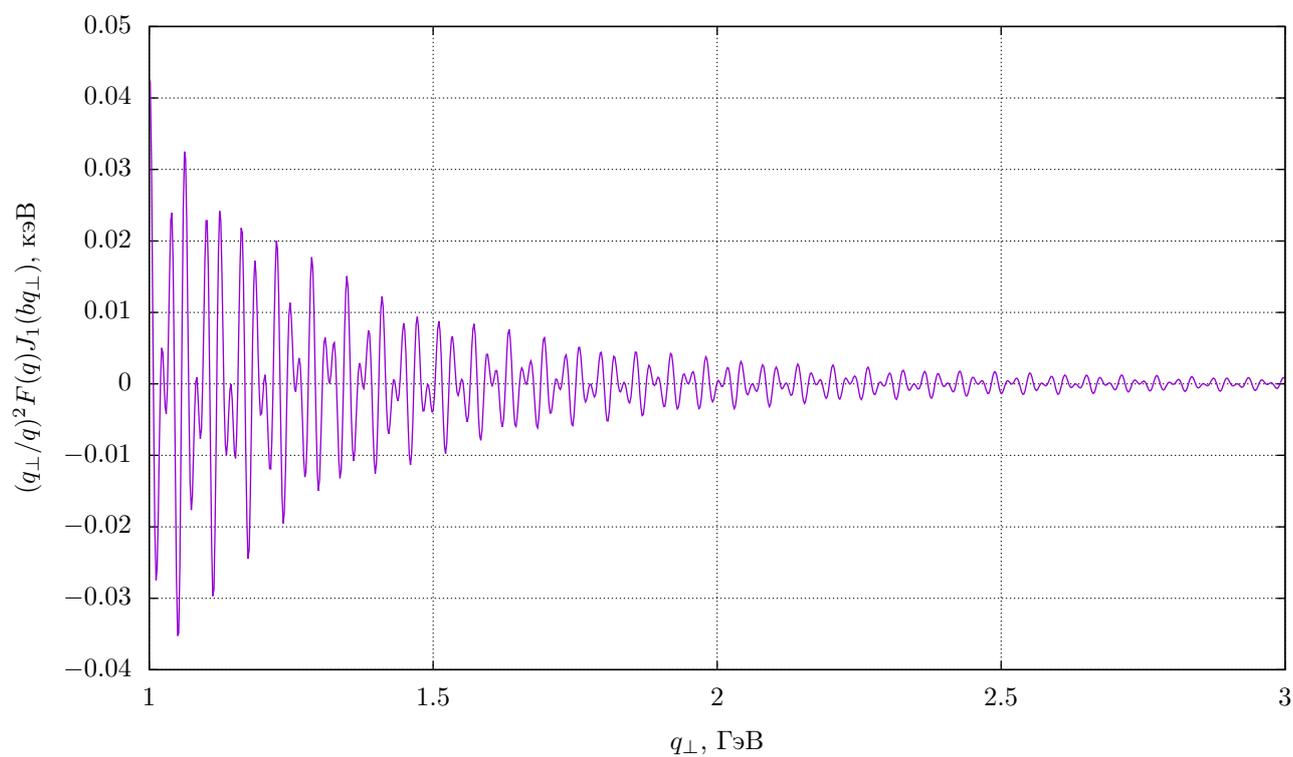
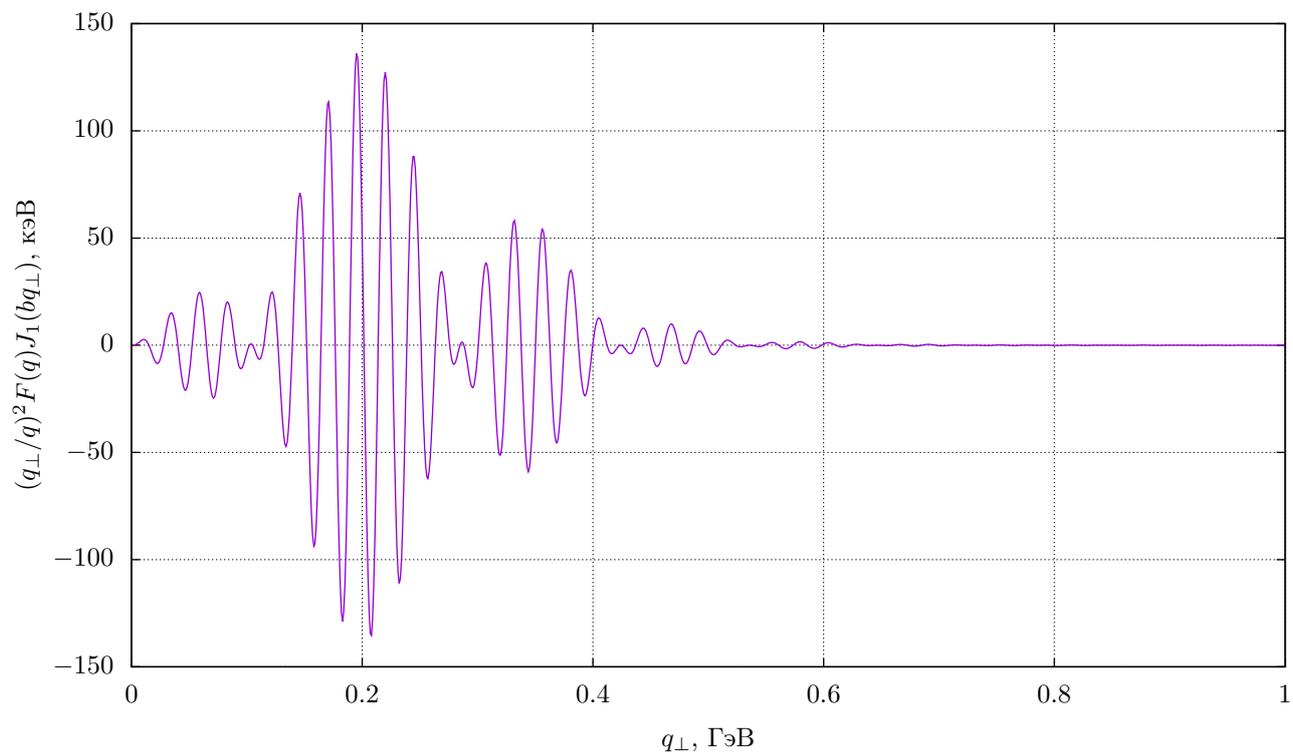


Рис. 2:  $(q_{\perp}/q)^2 F(q) J_1(bq_{\perp})$  для формфактора  $^{208}\text{Pb}$  из [1] при  $b = 50.0$  фм,  $\omega = 823$  ГэВ.

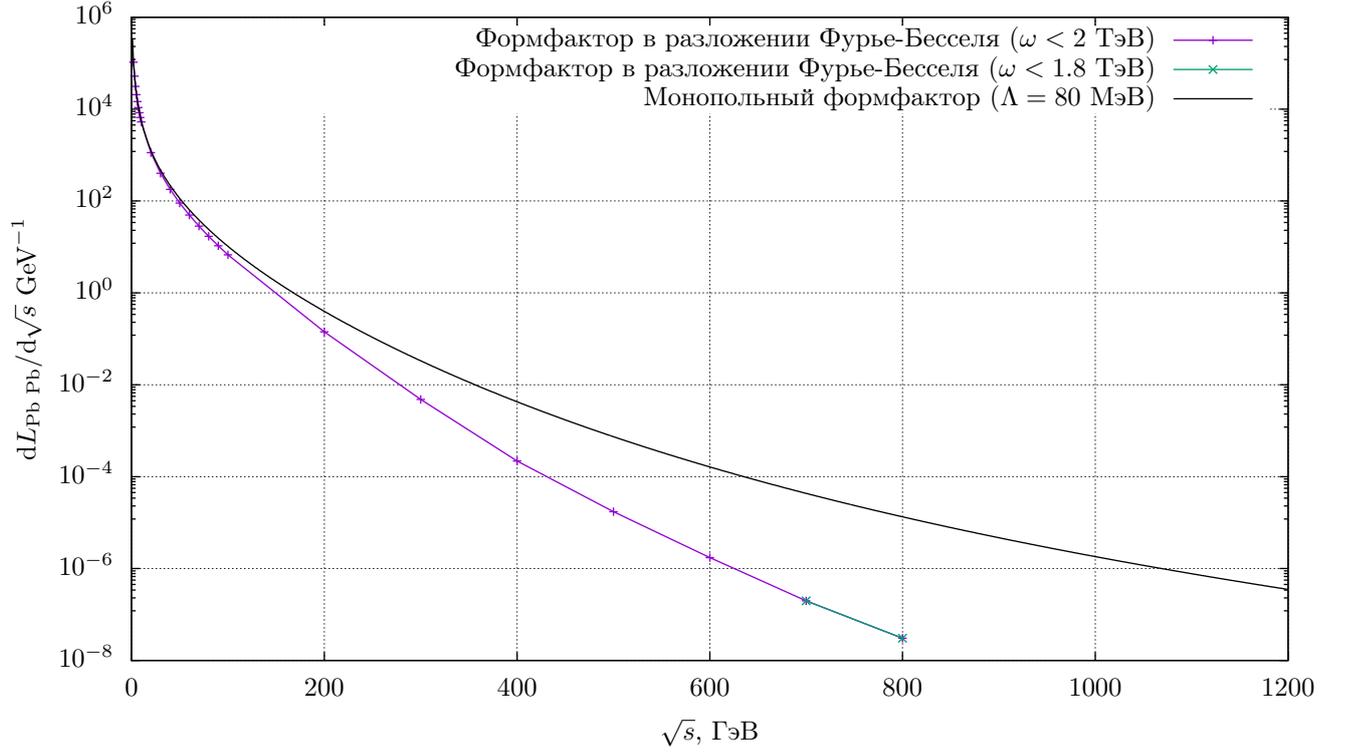


Рис. 3: Светимость фотонов в столкновениях  $^{208}\text{Pb}$  с энергией 5.02 ТэВ/(пара нуклонов). Точки  $\sqrt{s} = 700$  и  $800$  ГэВ для формфактора в разложении Фурье-Бесселя рассчитаны два раза с разным ограничением области интегрирования ( $\omega < 2$  ТэВ и  $\omega < 1.8$  ТэВ), чтобы посмотреть на чувствительность светимости к этому ограничению в области больших  $\sqrt{s}$ .

ещё несколько осцилляций, и тогда результат вычисления подынтегральной функции в интеграле по  $x$  может скакнуть больше, чем на  $10^{-5}$ . Поэтому я ограничил область интегрирования условиями  $b < 5R = 27.5$  фм =  $139$  ГэВ $^{-1}$  и  $\omega < 2$  ТэВ. По этой же причине у меня не получается рассчитать точки с  $\sqrt{s} \gtrsim 800$  ГэВ.

Результаты вычислений для формфактора 1987 года [1] приведены на рисунке 3. При этом я отмечу, что почти с каждой точкой мне пришлось разбираться индивидуально, чтобы выяснить, в чём проблема интегрирования именно в данном случае. Поэтому, строго говоря, все точки вычислены по разным алгоритмам. Однако, они хорошо согласуются между собой и с тем, что я ожидал получить в результате расчёта, так что я им доверяю. Расчёт каждой точки занимает 5–10 часов на моей домашней машине.

## 2 Аналитическое интегрирование

Помимо численных вычислений, я также попробовал взять интеграл (2) аналитически. У Прудникова, в разделе 2.12.23, есть формулы 10 и 13:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1}}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(c\sqrt{x^2+z^2}) J_{\nu}(ax) dx = cz^{\nu} K_{\nu}(az) \quad (3)$$

$$\left[ 0 < c < a; \operatorname{Re} z > 0; -1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{5}{2} \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1}}{x^2+\xi^2} \frac{\sin(c\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{x^2+z^2}} J_{\nu}(ax) dx = \xi^{\nu} \frac{\sin(c\sqrt{z^2-\xi^2})}{\sqrt{z^2-\xi^2}} K_{\nu}(\xi a) \quad (4)$$

$$\left[ 0 < c < a; \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} \xi > 0; -1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{5}{2}; \xi < z \right]$$

$$= \xi^{\nu} \frac{\operatorname{sh}(c\sqrt{\xi^2-z^2})}{\sqrt{\xi^2-z^2}} K_{\nu}(\xi a) \quad (5)$$

$$\left[ 0 < c < a; \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} \xi > 0; -1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{5}{2}; |\arg(\xi^2-z^2)| < \pi \right].$$

Следовательно, при  $b > R$  и  $\frac{R\omega}{\gamma} > N\pi$  ( $R = 11.0$  фм =  $55.7$  ГэВ $^{-1}$ , поэтому  $\omega > 1.97$  ТэВ)

$$\begin{aligned} n(b, \omega) &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega R^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \right)^{-2} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{x^2}{x^2+z^2-(k\pi)^2} - \frac{x^2}{x^2+z^2} \right] \frac{\sin \sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}} J_1 \left( \frac{bx}{R} \right) dx \right\}^2 \\ &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega R^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \right)^{-2} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a_k}{(k\pi)^2} \left[ \sqrt{z^2-(k\pi)^2} \frac{\sin k\pi}{k\pi} K_1 \left( \frac{b}{R} \sqrt{z^2-(k\pi)^2} \right) - z K_1 \left( \frac{b\omega}{\gamma} \right) \right] \right\}^2 \\ &= \frac{Z^2 \alpha \omega}{\pi^2 \gamma^2} K_1^2 \left( \frac{b\omega}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

— такой же результат, что и для формфактора точечной частицы.

Однако, нас больше интересует область не таких больших  $\omega$  (а также  $b < R$ ). Эта область соответствует мнимому  $\xi$  в интеграле (5). Функция Макдоналда  $K_1(x)$  от мнимого аргумента

$$K_1(ix) = -\frac{\pi}{2} (J_1(x) - iY_1(x)). \quad (7)$$

Она имеет нетривиальную вещественную часть, поэтому интеграл (5), если его продолжить в область мнимых  $\xi$ , будет комплексным (или расходиться). Я думаю, что должна сыграть роль особенность нашей функции, заключающаяся в том, что  $1/(x^2+z^2-(k\pi)^2)$  имеет полюс там же, где  $\sin \sqrt{x^2+z^2}$  имеет нуль. Наверное, интеграл (5) в этом случае сходится к вещественному числу, но я не знаю как его вычислить.

Дальше я опишу интересную штуку, которую я нашёл в статьях и попытался применить, чтобы вычислить интеграл (5), но сразу скажу, что у меня не получилось, и если неинтересно, можете дальше не читать. Речь идёт о теновом исчислении (umbral calculus). Оно описано в книге [3] и в диссертации [4]. Идея заключается в том, что ряды.

$$e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \quad (8)$$

и

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \quad (9)$$

очень похожи: чтобы получить функцию Бесселя из гауссиана, надо только поделить каждый член на  $n!$ . Для этого вводится функция, которая называется теновым вакуумом

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1)} \quad (10)$$

и специальный оператор  $\hat{c}$ , который действует на «начальное состояние» следующим образом:

$$\hat{c}^n \phi(0) = \phi(n). \quad (11)$$

Тогда

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \hat{c}^n \phi(0) = e^{-\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \phi(0). \quad (12)$$

$\hat{c}$  и  $x$  коммутируют друг с другом, поэтому с теновыми операторами можно работать как с обычными алгебраическими величинами, только в конце надо их применить к вакууму, чтобы получить обычные функции.

Выражение для  $J_\nu(x)$  также получается из ряда:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} = \left(\hat{c} \frac{x}{2}\right)^\nu e^{-\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \phi(0). \quad (13)$$

Выражение для  $I_\nu(x)$  проще всего получить из уравнения

$$I_\nu(ix) = e^{i\nu\frac{\pi}{2}} J_\nu(x). \quad (14)$$

В результате будет

$$I_\nu(x) = \left(\hat{c} \frac{x}{2}\right)^\nu e^{\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \phi(0). \quad (15)$$

Выражение для  $K_\nu(x)$  — по определению:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left[ \left(\hat{c} \frac{x}{2}\right)^{-\nu} - \left(\hat{c} \frac{x}{2}\right)^\nu \right] e^{\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \phi(0). \quad (16)$$

Отсюда окончательные представления нужных нам функций Бесселя:

$$J_1(x) = \hat{c} \frac{x}{2} e^{-\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad (17)$$

$$K_1(x) = \lim_{\nu \rightarrow 1} K_\nu(x) = \hat{c} \frac{x}{2} \ln \left(\hat{c} \frac{x}{2}\right) e^{\hat{c}\left(\frac{x}{2}\right)^2} \phi(0).$$

Аналогичные преобразования можно сделать и для тригонометрических функций. Разложение косинуса в ряд,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (18)$$

отличается от разложения  $e^{-x^2}$  тем, что в знаменателе стоит  $(2n)!$  вместо  $n!$ . Можно ввести теневой вакуум

$$\delta(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(2x+1)} \quad (19)$$

и теневой оператор  $\hat{s}$ :

$$\hat{s}^n \delta(0) = \delta(n). \quad (20)$$

Тогда

$$\cos x = e^{-\hat{s}x^2} \delta(0), \quad (21)$$

$$\sin x = -\frac{d}{dx} \cos x = 2\hat{s}x e^{-\hat{s}x^2} \delta(0). \quad (22)$$

Подставим полученные разложения в (5) для  $\nu = 1$ ,  $c = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \xi^2} \frac{\sin \sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} J_1(ax) dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \xi^2} \frac{2\hat{s}\sqrt{x^2 + z^2} e^{-\hat{s}(x^2 + z^2)}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \hat{c} \frac{ax}{2} e^{-\hat{c}\left(\frac{ax}{2}\right)^2} dx \phi(0)\delta(0) \\ &= a\hat{s}\hat{c} e^{-\hat{s}z^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{x^2 + \xi^2} e^{-(\hat{s} + \hat{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2)x^2} dx \phi(0)\delta(0). \end{aligned} \quad (23)$$

Трактуя показатель экспоненты как алгебраическую величину, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{x^2 + \xi^2} e^{-Ax^2} dx = \frac{1}{2A} - \frac{\xi^2}{2} e^{A\xi^2} E_1(A\xi^2), \quad (24)$$

где  $E_1(x)$  — интегральная экспонента,

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (25)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \xi^2} \frac{\sin \sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} J_1(ax) dx \\ = \frac{a\hat{s}\hat{c} e^{-\hat{s}z^2}}{2\hat{s} + \hat{c}\frac{a^2}{2}} \phi(0)\delta(0) + \frac{a\hat{s}\hat{c}\xi^2}{2} e^{\hat{c}\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 + \hat{s}(\xi^2 - z^2)} E_1\left(\hat{s}\xi^2 + \hat{c}\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2\right) \phi(0)\delta(0). \end{aligned} \quad (26)$$

К сожалению, что делать дальше я не знаю. Нужен какой-то трюк, который позволит выделить из этого выражения  $K_1(a\xi)$ . Приведу здесь разложения в ряд для  $E_1(x)$  и  $K_1(x)$ :

$$E_1(x) = -\gamma_e - \ln x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}, \quad (27)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} - \ln \frac{x}{2} I_1(x) - \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [\psi(n+1) + \psi(n+2)] \frac{(x/2)^{2n}}{n!(n+1)!}, \quad (28)$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!(k+1)!}. \quad (29)$$

Здесь  $\gamma_e$  — постоянная Эйлера, а  $\psi(x)$  — дигамма-функция:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} \Gamma(x), \quad (30)$$

$$\psi(n) = -\gamma_e + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \quad (31)$$

В принципе, из уравнения (26) проглядывает уравнение (5). Я думаю, что требования  $a > c$  и  $\operatorname{Re} \xi > 0$  следуют из условий на сходимость ряда, который можно получить из (26). Однако, понять, в чём проблема с чисто мнимым  $\xi$  у меня не получается.

Интересно, что теневого разложения можно придумать много. В [4] приводится следующий теневой оператор с соответствующим вакуумом  $\Phi(x)$ :

$$\hat{C}^\nu \Phi(0) = \frac{1}{(\Gamma(\nu+1))^2}. \quad (32)$$

Тогда, используя ряд

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (33)$$

ряд (9) можно переписать в виде

$$J_0(x) = \frac{1}{1 + \hat{C} \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Phi(0). \quad (34)$$

Функции Бесселя с целым индексом можно получить дифференцированием:

$$J_1(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x) = \frac{\hat{C} \frac{x}{2}}{1 + \hat{C} \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Phi(0). \quad (35)$$

Модифицированная функция Бесселя  $I_1(x)$ ,

$$I_1(x) = iJ_1(-ix) = \frac{\hat{C} \frac{x}{2}}{1 - \hat{C} \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Phi(0). \quad (36)$$

Чтобы получить  $K_1(x)$ , надо знать как  $I_\nu(x)$  зависит от индекса. Как это сделать я не знаю. В [4] упоминается понятие нецелого дифференцирования (fractional derivative); может быть, таким способом.

Аналогичный трюк работает с тригонометрическими функциями. Введём теневой оператор:

$$\hat{S}^\nu \Delta(0) = \frac{1}{\Gamma(2\nu + 1)}. \quad (37)$$

Тогда

$$\cos x = \frac{1}{1 + \hat{S}x^2} \Delta(0), \quad (38)$$

$$\sin x = -\frac{d}{dx} \cos x = \frac{2\hat{S}x}{(1 + \hat{S}x^2)^2} \Delta(0). \quad (39)$$

Подставим разложение в (5):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{x^2}{x^2 + \xi^2} \frac{\sin \sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} J_1(ax) dx \\ &= a\hat{S}\hat{C} \int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2 + \xi^2)(1 + \hat{S}(x^2 + z^2))^2 \left(1 + \hat{C}\left(\frac{ax^2}{2}\right)\right)} dx \Phi(0)\Delta(0). \end{aligned} \quad (40)$$

Получается интеграл даже не от экспоненты, а от рациональной функции. Он легко вычисляется, но итоговое выражение также выглядит неприступным.

### 3 Заключение

Сравнивая спектры фотонов для формфактора (1) и соответствующего монополюсного формфактора, я ожидал, что светимость во втором случае будет на порядки выше в области инвариантных масс  $\sqrt{s} \gtrsim 100$  ГэВ. В принципе, это и наблюдается. Думаю, что ограничение  $\omega < 2$  ТэВ, которое пришлось наложить на область интегрирования, даёт некоторый вклад в эту разницу, но, как следует из рисунка 3, он незначительный.

Можно провести некоторое исследование влияния ограничений  $b < 139$  ГэВ<sup>-1</sup>,  $\omega < 2$  ТэВ. Например, можно соответственно обрезать область интегрирования по  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $x$  для монополюсного формфактора и посмотреть, насколько сильно просядет светимость.

Можно ввести в расчёт уравнение (6). Оно справедливо лишь при  $b > R$ , но мне непонятно, почему его нельзя использовать при  $0 < b < R$ . Если его использовать можно, то это уберёт по крайней мере ограничение по  $\omega$ . Надо сделать соответствующие расчёты.

Можно поискать способы интегрирования произведения осциллирующих функций в литературе. Гугл выдаёт довольно много статей, и я некоторые из них читал, но те методы из них, что я пытался применить в нашей задаче (Shanks transformation [5], modified W transformation [6, 7]), ориентированы всё-таки только на одну осциллирующую функцию и не подходят для биений.

Но я не знаю, стоит ли тратить на это время. Я подозреваю, что разложение Фурье-Бесселя аппроксимировалось для  $q \ll 1$  ГэВ, и в области  $q > 0.2$  ГэВ мы больше работаем с артефактами приближения, чем с настоящими величинами. Наверное, стоит так и написать в статье и пока что закрыть этот вопрос.

Всё же, если кто-то сможет получить интеграл (5) хотя бы при тех же условиях на параметры, что написаны у Прудникова, мне будет очень интересно посмотреть на вывод.

## Список литературы

- [1] H. D. Vries, C.W. D. Jager, C. D. Vries. *Nuclear charge and magnetization density distribution parameters from elastic electron scattering*. Atom.Data Nucl.Data Tabl. 36, 495 (1987).
- [2] G. Fricke, C. Bernhardt, K. Heilig, L.A. Schaller, *et.al. Nuclear Ground State Charge Radii from Electromagnetic Interactions*. Atom.Data Nucl.Data Tabl. 60, 177 (1995).
- [3] D. Babusci, G. Datoli, S. Licciardi, E. Sabia. *Mathematical methods for physicists*. World Scientific, 2020.
- [4] S. Licciardi. *Umbral calculus, a different mathematical language*. Ph.D. thesis (2018). [arxiv:1803.03108](https://arxiv.org/abs/1803.03108)
- [5] Shanks transformation. [https://en.wikipedia.org/wiki/Shanks\\_transformation](https://en.wikipedia.org/wiki/Shanks_transformation)
- [6] S.K. Lucas, H.A. Stone. *Evaluating infinite integrals involving Bessel functions of arbitrary order*. J. Comput. Appl. Math. 64, 217 (1995).
- [7] A. Sidi. *A user-friendly extrapolation method of oscillatory infinite integrals*. Math. Comp. 51, 249 (1988).